SAYISAL TASARIM-I 2.HAFTA

BÖLÜM 2 - SAYI SİSTEMLERİ

İÇERİK:

- Sayı Sistemlerine Giriş
- Sayı Sistemlerinin İncelenmesi
- Onluk (Decimal), İkili (Binary-Dual), Sekizli (Octal) ve Onaltılık (Hexadecimal) Sayı Sistemleri
- Sayı Sistemlerinin Birbirlerine Dönüştürülmeleri
- Sayı Sistemlerinde Hesaplamalar
- İkili Sayı Sisteminde Toplama ve Çıkarma
- Tümleyen Aritmetiği
- İkili Sayı Sisteminde Çarpma
- İkili Sayı Sisteminde Bölme

SAYI SİSTEMLERİ-GİRİŞ

- Sayma ve sayı kavramının yeryüzünde ilk olarak nerede ve ne zaman doğduğu bilinmemekle beraber, bazı buluntular Sümer'lerin saymayı bildiklerini ve bugün kullandığımız onluk sayı düzeninin MS 400 dolaylarında, Hindistan'da geliştirildiğini göstermektedir. Onluk sayı düzeni daha sonra İslam bilginleri tarafından geliştirilmiş, MS 800 yıllarında onlu sayı sistemine 'Sıfır (0)' sayısı eklenmiş ve sayı düzenindeki rakam biçimleri değiştirilerek yeni bir şekil kullanılmaya başlanmıştır. Onluk sayı sisteminde kullanılan rakamlar, Endülüs üzerinden 1200'lü yıllarda Avrupa insanına aktarılmış ve sonuçta bugün bizim ve çoğu Avrupa ülkesinin kullandığı rakam biçimleri ortaya çıkmıştır.
- Günümüz bilgisayar teknolojisinde değişik sayı düzenleri kullanılmaktadır. Bunlar; ikili (binary-dual), sekizli (octal), onaltılı (hexadecimal) sayı sistemleridir.

SAYI SİSTEMLERİ- SAYI SİSTEMLERİNİN İNCELENMESİ

- Sayı sistemlerini incelerken ilk kavram; sayı sistemlerinde kullanılan rakam, işaret, karakter veya harfleri ve bunların temsil ettikleri anlamlardır
- Sayı sistemlerinde kullanılan rakamın / harfin / karakterin, sayı içerisinde bulunduğu basamağa bağlı olarak temsil ettiği anlamı değişir. Anlam değişikliğini belirleyen unsur, kök / taban değeridir.
- Bir sayı sistemini 'S', sayı sisteminde kullanılan rakam/karakterleri 'd' ve kökü de 'R' ile gösterir ve 'S' ile gösterilen sayı sistemini formülle ifade edersek;
- $S= d_n R^{n-1}+................+d_2 R^1+d_1 R^0$
- eşitliği elde edilir. Formülde d_n-d_0; sayı değerlerini, R^n- R^0 ise; köke bağlı olarak oluşan basamak değerlerini temsil eder.
- Kesirli kısmı bulunan sayıları ifade etmek için ise;
- $S = d_n R^{n-1}+..............+d_2 R^1+d_1 R^0, \; d_1 R^{-1}+d_2{}^{-2}+d_3 R^{-3}$

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU (DECİMAL) SAYI SİSTEMİ

- Günlük hayatımızda en çok kullandığımız onluk sayı sisteminde on değişik rakam vardır ve bunlar sırasıyla; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9'dur.
- Bu durumda d_n- d_0 sayı değerleri; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sayıları ile ifade edilir ve R; taban değeri olan 10 ile gösterilir. Bu durumda daha önce ifade edilen denklem (D:Desimal Sayı);
- $D = +d_n 10^{n-1} + \ldots\ldots + d_2 10^1 + d_1 10^0$
- Kesirli kısmı bulunan onlu sayıları ifade etmek için;
- $D = d_n 10^{n-1} + \ldots\ldots + d_2 10^1 + d_1 10^0,\ d_1 . 10^{-1} + d_2 . 10^{-2} + d_{3.} 10^{-3} + \ldots .$
- eşitliği kullanılır.
- Denkleme göre en sağdaki basamak en düşük ve en soldaki en yüksek anlamlı basamak olarak; 1985 sayısı,
- $1985 = 1.10^3 + 9.10^2 + 8.10^1 + 5.10^0$
- şeklinde yazılabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ (BİNARY-DUAL) SAYI SİSTEMİ

- ‘0’ ve ‘1’ rakamları ile temsil edilen, taban değeri ‘2’ olan ve iki olasılıklı durumları ifade etmek amacıyla kullanılan sayı sistemi **‘İkili’** veya **‘Binary’** sayı sistemi olarak adlandırılır.
- İkili sayı sisteminde her bir basamak **‘BİT’** olarak (**Bi**nary Digi**T**)
- En sağdaki basamağa en ‘**En Düşük Değerli Bit’** (Least Significant Bit - LSB),
- En soldaki basamağa **‘En Yüksek Değerli Bit’** (Most Significant Bit - MSB) denir.
- Buna göre ikili sayı sistemindeki basamak değerleri (B: Binary-ikili sayı sistemi);
  - $B = d_n 2^{n-1} + ... + d_2 2^1 + d_1 2^0$
- Aynı şekilde kesirli kısım bulunan ikili sayıların basamak değerleri:
  - $B = d_n 2^{n-1} + ... + d_2 2^1 + d_1 2^0, \; d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + ... + d_n 2^{-n}$
  - **Tam sayı kısmı** **Kesirli sayı kısmı**
- şeklinde olur.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ (BİNARY-DUAL) SAYI SİSTEMİ

- ‘Örnek olarak ‘101101101’ bir ikili sayı basamak değerlerine göre B = $1.2^8 + 0.2^7 + 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 1.2^0$
- eşitliği ile ifade edilir.
- Bu onluk sistemde;

D = 256+64+32+8+4+1 = 365 sayısına karşılık gelir.

- İkili sayı sistemi bilgisayarlar için uygun ve bu sistemde sayıların ifade edilmesi kolay olmasına rağmen, sayıların ifade edilmesi daha çok sayıda basamak ile mümkün olmaktadır. Onlu olarak ifade edilen bir sayıyı, ikili sistemde ifade etmek için ortalama üç katı daha fazla basamağa ihtiyaç vardır. Buda ikili sayı sisteminde yapılacak işlemlerin zaman alması, zorlaşması ve hata ihtimalinin yükselmesi sonucunu doğurur. Bu sakıncaları ortadan kaldırmak için, ikili sayı sisteminin tam katları olan ve işlemlerin daha az zamanda yapılmasına imkan tanıyan (ikili sayı sistemine dönüştürülmeleri veya ters işlemi çok kolay olan) sekizli ve onaltılı sayı sistemleri kullanılır.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ (BİNARY-DUAL) SAYI SİSTEMİ

- Bununla beraber, ikili sayı sistemi bilgisayarlarda aşağıdaki amaçlar için kullanılmaktadır:
  - i. Gerçek sayısal değeri ifade etmek için,
  - ii. Veri ile ilgili bellekteki adresi belirtmek için,
  - iii. Komut kodu olarak,
  - iv. Alfabetik ve sayısal olmayan karakterleri temsil etmek için bir kod olarak,
  - v. Bilgisayarda dahili ve harici olarak bulunan devrelerin durumlarını belirlemesi için bir sayı grubu olarak.

SAYI SİSTEMLERİ- SEKİZLİ (OCTAL) SAYI SİSTEMİ

- İkili sayı sistemindeki sayıların daha kolay gösterilmesini sağlayan sayı sistemlerinden birisi, sekizli (octal) sayı sistemidir.
- Sekizli sayı sisteminde taban ‘8’ ve kullanılan sayılar; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7’dir. Genelde yetmişli yıllarda mini bilgisayarlarda çokça kullanılan sekizli sayı sistemindeki basamak değerleri;
- $O = d_{n-1}8^{n-1}+\ldots\ldots\ldots\ldots+d_3 8^3+d_2 8^1+d_1 8^0\,,\quad d_1 8^{-1}{}_{+}\, d_2 8^{-2}+\ldots\ldots$
- formülü ile ifade edilir.

SAYI SİSTEMLERİ- ONALTİLİ (HEXADECİMAL) SAYİ SİSTEMİ

- İkili sayı sisteminin daha kolay gösterilmesini sağlayan ve günümüz bilgisayarlarında yaygın olarak kullanılan sayı sistemi onaltılık (hexadecimal) sayı sistemidir. Onaltılı sayı sisteminde 0 ile 9 arasındaki rakamlar ile A, B, C, D, E, F harfleri kullanılır.
- Bu sayı sistemindeki sayıların genel denklemi;
- $H = d_{n-1}16^{n-1}+.......+d_2 16^1+d_1 16^0 \quad , \quad d_1 16^{-1} + d_2 16^{-2} + d_2 16^{-3} +......$
- şeklinde oluşur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONALTİLİ (HEXADECİMAL) SAYİ SİSTEMİ

- Aşağıdaki Tablo da 0-20 arasındaki onlu sayıların ikili, sekizli, onaltılı sayı sistemlerindeki karşılıkları gösterilmektedir.

Onlu	İkili	Sekizli	Onaltılı
0	00000	0	0
1	00001	1	1
2	00010	2	2
3	00011	3	3
4	00100	4	4
5	00101	5	5
6	00110	6	6
7	00111	7	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARİN İKİLİ, SEKİZLİ VE ONALTILI SAYİLARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Kural1:** Onlu sayı sisteminden diğer (ikili, sekizli ve onaltılı) sayı sistemlerine dönüştürülecek sayı tam sayı ise; bu sayı, dönüştürülecek olan sayı sisteminin taban değerine sürekli bölünür. Bölüm sonucunda elde kalanların tersten sıralanmasıyla bu sayının yeni sayı sistemindeki karşılığı elde edilir.
- **Kural2:** Onlu sayı sisteminden diğer (ikili, sekizli ve onaltılı) sayı sistemlerine dönüştürülecek sayı ondaklı sayı ise; bu sayının tam sayı kısmı kural1'e göre yapılır. Ondalıklı kısmı ise dönüştürülecek olan sayı sisteminin taban değeri ile çarpılır. Çarpım sonucunda elde edilen sayının tam kısmı kaydedilerek, kesirli kısım bu taban değeri ile yeniden çarpılır. Bu işleme kesirli kısım '0' değerine (veya 0'a çok yakın bir değere) ulaşıncaya kadar devam edilir. Çarpım sonucunda elde tam sayıların baştan sona doğru sıralanmasıyla ondalık kısmın yeni sayı sistemindeki karşılığı elde edilir. Sonra elde edilen tam ve ondalık kısımlar virgülle ayrılarak ana sonuç elde edilir.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARİN İKİLİ SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 1:** $(39)_{10}$ sayısını ikili sayı sistemine çevirelim.

Bölünen	Bölüm		Kalan	
39/2	19	+	1	LSB
19/2	9	+	1	
9/2	4	+	1	
4/2	2	+	0	yazım yönü
2/2	1	+	0	MSB

100111

MSB: En büyük değerlikli sayı. (Most Significant Bit)

LSB: En küçük değerlikli sayı. (Least Significant Bit)

Sonuç olarak; (39)10=(100111)2 eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN İKİLİ SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 2:** (1271)10 sayısını ikili sayıya dönüstürelim

İşlem		Bölüm	Kalan
1271 / 2	=	635	1
635 / 2	=	317	1
317 / 2	=	158	1
158 / 2	=	79	0
79 / 2	=	39	1
39 / 2	=	19	1
19 / 2	=	9	1
9 / 2	=	4	1
4 / 2	=	2	0
2 / 2	=	1	0
1			1

Sonuç olarak;

$(1271)_{10} = (10011110111)_2$

esitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN İKİLİ SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 3:** (41.6875)10 sayısını ikili sayıya çevirelim.

Tam sayı ve kesirli kısmı bulunan bir sayıyı ikili sayıya çevirmek için, tam sayı ve kesir kısımları ayrı-ayrı dönüştürülür ve bulunan sayılar birleştirilir.

Önce tam sayı kısmını çevirelim:

İşlem	Bölüm	Kalan
41 / 2	20	1
20 / 2	10	0
10 / 2	5	1
5 / 2	2	0
2 / 2	1	0
1		1

$(41)_{10} = (100101)_2$

Daha sonra kesirli sayı kısmının çevirimini yapalım:

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN İKİLİ SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- Kesir kısmı

	Tamsayı
$0.6875 * 2 = 1.3750$	1
$0.3750 * 2 = 0.7500$	0
$0.7500 * 2 = 1.5000$	1
$0.5000 * 2 = 1.0000$	1

$(0.6875)_{10} = (1011)_2$

Sonuçta, iki sayıyı birleştirirsek;

$$(41.6875)_{10} = (100101.1011)_2$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN SEKİZLİ SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 1:** $(153)_{10}$ sayısını sekizli sisteme çevirelim.

Verilen sayının devamlı 8 ile bölünmesi ve kalanın yazılması şeklinde işlem yapılır:

İşlem	Bölüm	Kalan
153 / 8	19	1
19 / 8	2	3
2		2

İşlemler sonucunda,

$$(153)_{10} = (231)_8$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN SEKİZLİ SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 2:** (0.513)10 sayısını sekizli sayı sistemine çevirelim.

Verilen sayı devamlı 8 ile çarpılarak oluşan tam sayılar yazılır.

	Oluşan tam sayı	
0.513 x 8 = 4.104	4	
0.104 x 8 = 0.832	0	yazım yönü
0.832 x 8 = 6.656	6	
0.656 x 8 = 5.248	5	
0.248 x 8 = 1.984	1	

Sonuç olarak;

$$(0.513)_{10} \cong (0.40651)_8$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN ONALTILI SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 1:** (214)10 sayısını onaltılık sayı sistemine çevirelim.

Verilen sayının devamlı 16'ya bölünmesi ve kalanının yazılması seklinde işlem yapılır:

İşlem	Bölüm	Kalan	
214 / 16	13	6	6
13 / 16	0	13	D

Sonuç olarak;

$$(214)_{10} = (D6)_{16}$$

eşitliği yazılabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- ONLU SAYILARIN ONALTILI SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

- **Örnek 2:** (214.375)10 = (?)16 dönüsümünü yapalım.
- Tam sayı kısmı

İşlem	Bölüm	Kalan	
214 / 16	13	6	→ 6 ↑
13 / 16	0	13	→ D

- Kesirli kısmı

$$(0.375)_{10} = (?)_{16}$$
$$0.375 \times 16 = 6.0$$

Sonuç olarak;

- (214.375)10 = (D6.6)16

esitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ, SEKİZLİ VE ONALTILI SAYİLARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Kural: İkili, sekizli yada onaltılı sayı sistemindeki bir sayı onlu sayı sistemine basamak değerleri toplanarak dönüştürülür. Genel formülüzasyon aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$S = d_{n-1}R^{n-1}+.............+d_2R^1+d_1R^0+d_1R^{-1}+d_2{}^{-2}+d_3R^{-3}$$

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYILARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Formül:

$D = d_{n-1}2^{n-1} + \ldots + d_2 2^1 + d_1 2^0 + d_1 2^{-1} + d_2 2^{-2} + \ldots + d_n 2^{-n}$

Örnek 1: (11001)2 sayısının onluk sayı sistemindeki karşılığını bulalım.

Her bir basamakta bulunan sayı basamak değeri ile çarpılır ve bulunan sayılar toplanırsa;

$$1\ 1\ 0\ 0\ 1 \longrightarrow 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 1x2^0 = 16 + 8 + 0 + 0 + 1$$

olur. Bu durumda;

$$(11001)_2 = (25)_{10} = 25$$

eşitliği yazılabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYILARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Örnek 2: (100.01)2 sayısını onluk sayı sistemine dönüştürelim.

$$100.01 = 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 , 0.2^{-1} + 1.2^{-2}$$

$$= 1.4 + 0.2 + 0.1 , 0.1/2 + 1.1/4$$

$$= 4 + 0 + 0 + 0 + 1/4$$

$$= (4.25)10$$

sayısı bulunur. Bu durumda;

(100.01)2 = (4.25)10 eşitliği elde edilir.

SAYI SİSTEMLERİ- SEKİZLİ SAYILARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Formül:

$D = d_{n-1}8^{n-1}+............+d_3 8^2+d_2 8^1+d_1 8^0 + d_1 8^{-1} + d_2 8^{-2} +......$

Örnek 1:(372)8 sayısını onluk sayı sistemine çevirelim.

$$(372)_8 = 3x8^2 + 7x8^1 + 2x8^0$$

$$= 3x64 + 7x8 + 2x1$$

$$= 250$$

sayısı bulunur.

Bu durumda;

$$(372)_8 = (250)_{10}$$

eşitliği elde edilir.

SAYI SİSTEMLERİ- SEKİZLİ SAYILARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Örnek 2: $(24.6)_8 = (?)_{10}$ dönüşümünü gerçekleştirelim.

$(24.6)_8 = 2x8^1 + 4x8^0 + 6x8^{-1}$.

$= 16 + 4 + 0.75 = 20.75$

sayısı bulunur. Sonuçta;

- $(24.6)_8 = (20.75)_{10}$

eşitliği oluşur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONALTILI SAYILARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Formül:

$D = d_{n-1}16^{n-1} + \ldots\ldots + d_1 16^0 + d_1 16^{-1} + d_2 16^{-2} + d_2 16^{-3} + \ldots\ldots$

Örnek 1: $(E70FCA)_{16}$ sayısını onlu sisteme dönüştürelim.

$$\begin{aligned} E70FCA &= Ex16^5 + 7x16^4 + 0x16^3 + Fx16^2 + Cx16^1 + Ax16^0 \\ &= 1844719 + 458752 + 0 + 3840 + 192 + 10 \\ &= (2307513)_{10} \end{aligned}$$

sayısı bulunur. Sonuçta;

$$(E70FCA)_{16} = (2307513)_{10}$$

eşitliği yazılabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- ONALTILI SAYILARIN ONLU SAYILARA DÖNÜŞÜMÜ

Örnek 2: $(5D1.D9)_{16} = (?)_{10}$ dönüsümünü yapalım.

$$
\begin{aligned}
5D1.D9 &= 5x16^2 + 13x16^1 + 1x16^0 \,.\, 13x1/16 + 9x1/256 \\
&= 1280 + 208 + 16 \,.\, 13/16 + 9/256 \\
&= (1504.8476)_{10}
\end{aligned}
$$

sayısı bulunur. Bu durumda,

$$(5D1.D9)_{16} = (1504.8476)_{10}$$

eşitliği yazılabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYILARIN SEKİZLİ SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

- **Kural:** İkili sistemdeki bir sayıyı sekizli sistemde ifade etmek için, ikili sistemdeki sayılar sağdan sola doğru üçerli kümeler halinde ayrılır ve en sondaki kümedeki bitlerin sayısı üçten az ise sola doğru ‘0’ eklenerek üçe tamamlanır.

Örnek: $(11001111011101)_2$ sayısını sekizli sayı sistemine dönüştürelim.

Üçerli kümelere ayırma ve eksik bitleri tamamlama sonucunda,

011 001 111 011 101

kümeleri elde edilir. Her kümedeki sayının onluk karşılığı yazılırsa;

$$(011\ 001\ 111\ 011\ 101)_2 = (3\ 1\ 7\ 3\ 5)_8$$

şeklinde sekizli sistemdeki sayı bulunur. Bu durumda,

$$(11001111011101)_2 = (31735)_8$$

eşitliği yazılabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYILARIN SEKİZLİ SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

Kural: Ondalıklı ikili sayıların sekizli sayılara dönüşümü aynı yöntemle gerçekleştirilir. Yalnızca, kesirli kısımdaki gruplandırma soldan sağa doğru yapılır

Örnek: $(1101101101.11110000011 0)_2 = (?)_8$ dönüşümünü yapalım.

Sayı, $(001\ \ 101\ \ 101\ \ 101.111\ \ 100\ \ 000\ \ 110)_2$ şeklinde gruplandırılıp, her grubun karşılığı olan ikili sayı yazılırsa;

$$1 \quad 5 \quad 5 \quad 5\ .\ 7 \quad 4 \quad 0 \quad 6 \ = \ (1555.7406)_8$$

sonucu elde edilir. Sonuçta;

$$(1101101101.111100000110)_2 = (1555.7406)_8$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYILARIN ONALTILI SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

- **Kural:** İkili sayı sisteminden onaltılık sayı sistemine dönüştürme işlemi, ikili sistemdeki sayının dörderli gruplara ayrılıp, her bir gruptaki sayıların karşılıklarının yazılması şeklinde gerçekleştirilir. Gruplama işlemine sağdan başlanır ve en sondaki grup ‘0’ eklenerek dört bite tamamlanır. Gruplardaki sayıların karşılıkları olan sayılar yazılınca, onaltılık sistemdeki sayı elde edilir.

Örnek 1: $(10111101110000111101)_2$ sayısını onaltılık sayı sistemine dönüştürelim.

Verilen sayı dört bitlik gruplar halinde yazılırsa; 1011 1101 1100 0011 1101 şeklini alır. Bu gruplardaki sayıların onaltılık sistemdeki karşılıkları yazılırsa;

1011	1101	1100	0011	1101
B	D	C	3	D

sayıları elde edilir.

Sonuç olarak; $(10111101110000111101)_2 = (BDC3D)_{16}$ eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYILARIN ONALTILI SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

- **Kural:** İkili sayı sisteminden onaltılık sayı sistemine dönüştürme işlemi, ikili sistemdeki sayının dörderli gruplara ayrılıp, her bir gruptaki sayıların karşılıklarının yazılması şeklinde gerçekleştirilir. Gruplama işlemine sağdan başlanır ve en sondaki grup '0' eklenerek dört bite tamamlanır. Gruplardaki sayıların karşılıkları olan sayılar yazılınca, onaltılık sistemdeki sayı elde edilir.

Örnek 1: $(10111101110000111101)_2$ sayısını onaltılık sayı sistemine dönüştürelim.

Verilen sayı dört bitlik gruplar halinde yazılırsa; 1011 1101 1100 0011 1101 şeklini alır. Bu gruplardaki sayıların onaltılık sistemdeki karşılıkları yazılırsa;

1011	1101	1100	0011	1101
B	D	C	3	D

sayıları elde edilir.

Sonuç olarak; $(10111101110000111101)_2 = (BDC3D)_{16}$ eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- SEKİZLİ SAYILARIN İKİLİ SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

- **Kural:** Sekizli sistemdeki bir sayıyı ikili sayı sistemine dönüştürmek için, her bir basamaktaki sayının karşılığı olan ikili sayı 3 bitlik gruplar şeklinde yazılır. Gruplar halinde yazılan ikili sayıların karşılığı olan sayıların bir araya getirilmesi ile ikili sistemdeki sayı ortaya çıkar.

Örnek: $(673.124)_8$ sayısını ikili sayı sistemine çevirelim.

Önce her bir sayının karşılığı olan ikili sayı 3 bit olarak yazılır:

6=110, 7=111, 3=011, 1=001, 2=010, 4=100.

Yazılan sayılar bir araya getirilirse;

$$(673.124)_8 = (110111011.001010100)_2$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- ONALTILI SAYILARIN İKİLİ SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

- **Kural:** Onaltılı sistemdeki bir sayıyı ikili sayı sistemine dönüştürmek için; her basamaktaki sayının karşılığı olan ikili sayı 4 bit şeklinde yazılır. 4 bitlik gruplar bir araya getirilerek ikili sayı bulunur.

Örnek: $(5D1D69)_{16}$ sayısını ikili sisteme çevirelim.

Herbir basamaktaki onaltılık sayının karşılığı olan ikili sayı yazılırsa;

5=0101, D=1101, 1=0001, D=1101, 6=0110, 9=1001

değerleri elde edilir.

Yazılan ikili sayıların bir araya getirilmesi ile, sonuç olarak;

$$(5D1D69)_{16} = (010111010001110101101001)_2$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- SEKİZLİ SAYILARIN ONALTILI SAYILARA DÖNÜŞTÜRÜLMESİ

- **Kural:** Sekizli sistemdeki bir sayıyı onaltılık sayı sistemine dönüştürmenin en pratik yolu, sekizlik sayıyı önce ikilik sayı sistemine dönüştürmek ve daha sonra ikili sayıyı onaltılık sayıya çevirmektir.

Örnek : $(5431)_8$ sayısını onaltılık sayıya dönüştürelim.

Sekizlik sayı önce ikili sayıya çevrilir.: $(5431)_8 = (101100011001)_2$

Daha sonra bulunan sayı dörderli gruplara ayrılıp, her bir grubun karşılığı olan onaltılı sistemdeki ifade yazılırsa;

$$1011 = B, \quad 0001 = 1, \quad 1001 = 9$$

eşitlikleri bulunur. Bulunan sayılar bir araya getirilirse;

$$(B19)_{16}$$

sayısı elde edilir. Bu durumda; $(5431)_8 = (D19)_{16}$ eşitliği yazılabilir.

Sayı Sistemleri- Onaltılı Sayıların Sekizli Sayılara Dönüştürülmesi

- **Kural:** Onaltılık sayıyı sekizli sisteme çevirmek için en pratik yöntem; onaltılık sayının ikili sisteme ve daha sonra ikili sistemdeki sayının sekizli sisteme çevrilmesidir.

Örnek: $(E0CA)_{16}$ sayısını sekizli sisteme çevirelim.

Önce onaltılı sayı ikili sisteme çevrilir. Onaltılı sistemdeki sayının ikili sisteme çevrilmesi için, her bir basamaktaki sayının ikili karşılığı dört bitlik olarak yazılırsa;

$$E = 1110, \quad 0 = 0000, \quad C = 1100, \quad A = 1010$$

sayıları bulunur. Bulunan sayılar birleştirilirse;

$$(E0CA)_{16} = (1110000011001010)_2$$

sayısı elde edilir. Elde edilen ikili sayı, her grubun karşılığı olan sekizli sayının üçerli gruplar halinde yazılması şeklinde sekizli sayıya dönüştürülürse;

$$(E0CA)_{16} = (1110000011001010)_2 = (160312)_8$$

eşitliği bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- SAYI SİSTEMLERİNDE İŞLEMLER

Tüm sayı sistemlerinde sayılarda işaret kullanılabilir. Yani pozitif ve negatif sayılarla hesaplama yapılabilir. Bu gerçek göz önünde bulundurularak, onluk sayılarda hesaplama yaparken aşağıdaki ilişkiler kullanılabilir. Bu ilişkiler bütün sayı sistemleri için geçerlidir.

- **a)** $+a + (+b) = a + b$ **b)** $+a + (-b) = a - b$
- **c)** $+a - (+b) = a - b$ **d)** $+a - (-b) = a + b$

İkili, sekizli ve onaltılı sistemlerdeki hesaplamalarda da dört temel işlem (toplama, çıkarma, çarpma, bölme) kullanılır. Ancak, dijital bilgisayarlarda kullanılan temel sayı sistemi ikili sayı sistemi olduğundan, ikili sayı sistemindeki dört işlemi detaylı olarak inceleyelim.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYI SİSTEMİNDE TOPLAMA

İkili sayı sisteminde yapılan toplama işlemi, onlu sayı sisteminde olduğu gibi aynı basamaktaki sayıların toplanması şeklinde yapılır. İkili sayı sistemindeki toplama kuralları aşağıdaki şekilde sıralanabilir.

- 0 + 0 = 0, 1 +0 = 1, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 10 veya 1 + 1 = 0 Elde 1 (C=1).

'1 + 1' toplama işleminde sonuç olarak '0' ve bir soldaki basamağa aktarılmak üzere 'elde 1' ortaya çıkar. Bu onluk sayılarla yapılan toplama işlemindeki 9+1 rakamlarının toplamından '0' ortaya çıkması ve eldeki 1'in bir soldaki basamağa aktarılmasına benzer.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYI SİSTEMİNDE TOPLAMA

- **Örnek 1**: İkili sayı sistemine göre aşağıdaki toplama işlemlerini gerçekleştirelim.

10	101	101
+ 01	+ 010	+ 011
11	111	1000

- **Örnek 2 :** Aşağıda verilen toplama işlemlerini yapalım.

1110	1101	111011
+ 0110	1111	011011
10100	+ 1011	110101
	100111	010010
		10011101

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYI SİSTEMİNDE ÇIKARMA

- İkili sayılarda çıkarma işleminde özetlenen kurallar uygulanır:
- 0 - 0 = 0,   1 - 0 = 1,   1 - 1 = 0,   0 - 1 = 1 (borç 1),   10 - 1 = 1
- Bu kuralların uygulandığı yöntem, **'doğrudan çıkarma yöntemi'** olarak adlandırılır. Ana sayının çıkarılan sayıdan büyük olması durumunda, yani sonucun '0' veya 0'dan büyük olması durumunda doğrudan çıkarma yöntemi kullanılabilir.
- **Örnek :** Aşağıdaki çıkarma işlemlerini doğrudan çıkarma yöntemi ile yapalım.
- 10110   101110
- \- 1101   - 10011
- 1001   11011
- Çıkarma işlemi sonucunun 0'dan küçük olması durumunda doğrudan çıkarma yöntemi kullanılamaz. Bu nedenle, sonucun 0'dan küçük çıktığı işlemleri gerçekleştirmek ve bilgisayarlarda mantıksal uyumlaştırma işlemini kolaylaştırmak amacıyla, **'tümleyen aritmetiğine göre çıkarma'** olarak adlandırılan çıkarma yöntemi kullanılır. Tümleyen aritmetiği ile çıkarma yönteminde tüm çıkarma islemleri yapılabilmekte ve bu nedenle bilgisayarlarda bu yöntem kullanılmaktadır.

SAYI SİSTEMLERİ- TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ

- Tümleyen aritmetiği, sayısal bilgisayarlarda çıkarma işlemini gerçekleştirmek amacıyla kullanılan matematiksel bir yöntemdir.

- Tümleyen aritmetiğini anlamanın en pratik yolu, taşıtlarda kullanılan kilometre sayacını göz önünde bulundurmaktır. Onlu sayı sisteminde çalışan kilometre sayaçları genelde beş basamaklıdır. 00000 başlangıç değerinden ileri doğru gidildiğinde 00001, 00002 gibi artarken, geriye doğru gidildiğinde sayacın değerleri 99999, 99998 gibi azalır. Bu sayaç örneğinde, bir adım ileri gidildiğinde 00001 ve bir adım geriye gidildiğinde 99999 değerine ulaşıldığından bu sayılara birbirinin tümleyeni denmektedir. Buna göre 00002 sayısının tümleyeni 99998 değeridir.

SAYI SİSTEMLERİ- TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE İŞLEMLER

- Araçların kilometre sayaçları üzerinde açıklanan tümleyen aritmetiğinin ikilik sayılarda uygulamasıyla iki türlü tümleyen aritmetiği ortaya çıkar:
- ‘1’ tümleyeni ve ‘2’ tümleyeni.
- ‘1’ tümleyeni; (2n-N-1) ve ‘2’ tümleyeni; (2n-N) formülleri ile ifade edilir.
- Formüldeki 'n' değeri verilen ‘N’ sayısındaki basamak sayısıdır. Formüllerin incelenmesinden; ‘2’ tümleyeninin, ‘1’ tümleyenine 1 eklenmesi ile oluştuğu görülür. ‘1’ ve ‘2’ tümleyeni mantıkları, onluk sistemde ‘9’ ve ‘10’ tümleyenler şeklinde temsil edilir. Tümleyen aritmetiği çeşitleri daha genel bir ifade ile, ‘r’ tabanlı bir sayı sisteminde **‘r tümleyeni**’ ve **‘r-1 tümleyeni**’ olarak ifade edilebilir.

SAYI SİSTEMLERİ- R-TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE İŞLEMLER

- r tabanlı bir sayı sisteminde, n basamaklı pozitif bir tamsayı N ile temsil edilirse, N sayısının r tümleyeni r^n-N (N≠0) olarak tanımlanabilir. Aşağıdaki örnekler, 'r tümleyeni' terimini anlamaya yardım edecektir.
- **Örnek :** $(52520)_{10}$ sayısının r tümleyenini (onlu sayı olduğundan 10 tümleyenini) bulalım.
- Sayıda basamak sayısı: n=5 ve taban: r=10 olduğundan; sayının r tümleyeni:

$$r^n - N = 10^5 - 52520 = 47480$$

- olarak bulunur.
- **Örnek :** $(0.3267)_{10}$ sayısının 10 tümleyenini (r tümleyenini) bulalım.
- Verilen sayıda tam sayı kısmı bulunmadığından basamak sayısı;

$10^n = 10^0 = 1$ olarak alınır ve sonuç olarak;

$$r^0 - N = 1 - 0.3267 = (0.6733)_{10}$$

- sayısı bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE İŞLEMLER

- **Örnek :** $(101100)_2$ sayısının 2 tümleyenini bulalım.
- Sayı ikili sistemde olduğundan, r=2 ve sayı 6 basamaklı olduğundan n=6 değerleri bulunur. Bu değerler formülde yerine konulursa, verilen ikili sayının 'r' tümleyeni olarak;

$$(2^6) - (101100)_2 = (1000000 - 101100)_2 = 010100$$ değeri bulunur.

- **Örnek :** $(0.0110)_2$ sayısının 2 tümleyenini bulalım.
- İkili sistemdeki sayının tam sayı kısmı bulunmadığından; sayının 2 tümleyeni;

$$2^0\text{-}N = 1 - 0.0110 = (0.1010)_2$$ olarak bulunur.

- Yukarıdaki açıklamalardan ve örneklerden, ikili sayı sistemindeki bir sayının 2 tümleyenini bulmanın en kolay yolunun; sayıya sağdan bakarak ilk 1'e kadar olan sayıları olduğu gibi bırakmak (1 dahil), diğer bitlerdeki değerlerin tersini almak (1 ise 0, 0 ise 1 yazmak) olduğu söylenebilir.

SAYI SİSTEMLERİ- R-TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- Elektronik elemanlar ile çıkarma söz konusu olduğunda daha kullanışlı (etkin) olan yöntem, sayıların tümleyenini alarak toplama işlemi yapmaktır. Bu yöntemde, ‘r’ tabanındaki iki pozitif sayının ‘M-N’ işlemi aşağıdaki gibi özetlenebilir:
  - İki sayıyı çıkarma yerine M sayısının kendisi ile N sayısının ‘r’ tümleyeni toplanır.
  - Toplama sonucunda elde edilen değer incelenir:
  - Eğer en soldaki basamakların toplanması sonucunda elde değeri oluşursa bu değer atılır. Bulunan sonucun ‘(+) pozitif’ olduğu kabul edilir.
  - Eğer elde değeri oluşmazsa, toplama sonucunda elde edilen değerin ‘r’ tümleyeni alınır ve bulunan değerin önüne ‘(-) eksi’ işareti konulur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- **Örnek :** 10 tümleyenini kullanarak, (72532 **–** 3250) = ? işlemini yapalım.
- M=72532 72532
- N=03250 10 tümleyeni N=96750 + 96750
- elde 1 69282
- **işaret biti**
- İşaret biti 1'dir ve bu durumda sonuç; (+69282) olarak bulunur.
- **Örnek :** $(03250)_{10} – (72532)_{10}$ = ? işlemini 'r' tümleyen aritmetiği yöntemi ile yapalım.
- N = 03250 03250
- M = 72532 10 tümleyeni = 27468 + 27468
- **elde yok** 0 30718
- Bu durumda 30718 sayısının 'r' tümleyeni alınır. Sonuç olarak; (-69282)

SAYI SİSTEMLERİ- R-TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- **Örnek :** 'M – N' işlemini 'r' tümleyenini kullanarak yapalım.
- M = 1010100   1010100
- N = 1000100 $\Rightarrow$ 2 tümleyeni $\Rightarrow$ + 0111100
- elde biti   1 0010000
- Sonuç olarak; $(0010000)_2$ değeri bulunur.
- **Örnek** : M = 1000100
- N = 1010100 ise 'M – N' işlemini '2' tümleyenine göre yapalım.
- 1000100
- N = 1010100 ise 2 tümleyeni = 0101100 bulunur. + 0101100
- elde yok   0   1110000
- Bulunan sonucun 'r' tümleyeni alınır. Sonuç ; $(- 0010000)_2$
- olarak bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ

- r tabanına göre verilen ve yalnızca tam sayı kısmı bulunan pozitif bir n sayısının **'r-1' tümleyeni;**
  - **'2^n-N-1'** formülüyle,
- 'n' basamaklı tam sayı ve 'm' basamaklı kesirli kısmı bulunan bir sayının **'r-1' tümleyeni;**
  - **'r^n-r^{-m}-N'**
- formülü ile bulunabilir.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE İŞLEMLER

- **Örnek :** $(52520)_{10}$ sayısının 'r-1' tümleyenini ('9' tümleyenini) bulalım.
- Sayının yalnızca tam sayı kısmı bulunduğundan, '2^n-N-1' formülü uygulanabilir. Taban = 10 ve basamak sayısı n = 5 olduğuna göre ilgili formülden sonuç;
  - $R^n - N - 1 = 10^5 - 52520 - 1 = 47479$
- olarak bulunur.
- **Örnek :** $(0.3267)_{10}$ sayısının 9 tümleyenini bulalım.
- Sayının tam sayı ve kesirli kısmı bulunduğundan ilgili formül uygulanırsa;

$$r^n - r^{-m} - N = 10^0 - 10^{-4} - 0.3267 = 1 - 0.0001 - 0.3267$$
$$= 0.9999 - 0.3267 = 0.6732$$

- değeri bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE İŞLEMLER

- **Örnek :** $(101100)_2$ sayısının 'r-1' tümleyenini (1 tümleyeni) bulalım.
- Verilen sayı ikili sistemde olduğundan r=2 ve sayıda 6 basamak bulunduğundan n=6' dır. Bu durumda,

$$2^n\text{-}N\text{-}1=2^6\text{-}101100\text{-}1=1000000\text{-}101100\text{-}1$$

$$= (010011)_2$$ değeri bulunur.

-
- **Örnek :** $(0.0110)_2$ sayısının 1 tümleyenini bulalım.
- İkili sistemdeki sayıda tamsayı kısmı bulunmadığından n=0 ve kesirli kısım 4 basamaklı olduğundan m=4' dür. İlgili formülün uygulanması ile sonuç;

$$(2^n - 2^{-4} - 0.0110) = (1\text{-}0.0001 - 0.0110)$$

$$= (0.1111\text{-}0.0110)_2 = (0.1001)_2$$

olarak bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- ‘r – 1’ tümleyeni ile çıkarma işlemi tamamen ‘r’ tümleyeni ile çıkarma işleminin aynısıdır. Yalnızca sonucun pozitif olduğu durumlarda, düzeltme biti denilen 1 sayısının eklenmesi işlemi yapılır. ‘r’ tabanında iki pozitif sayının M-N işlemi (r-1 tümleyeni yöntemi ile) aşağıdaki şekilde özetlenebilir:
  - M sayısının kendisi ile N sayısının ‘r-1’ tümleyeni toplanır.
  - Toplama sonucunda bulunan değerin taşma (işaret) biti kontrol edilir:
    - **a**- Eğer taşma biti oluşursa (işaret biti 1), bulunan değere 1 değeri eklenir.
    - **b**- Eğer taşma biti oluşmazsa (işaret biti 0), toplama sonucunda elde edilen sayının ‘r-1’ tümleyeni alınır ve önüne (-) işareti konur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- **Örnek :** M=72532,
- N=03250 ise 'M-N' işlemini 'r-1' tümleyenine göre yapalım.
- İşlemi yapabilmek için önce çıkarılan sayının 'r-1' tümleyeninin bulunması gerekir. Bulunan bu değer ile 'M' sayısı toplanır.

72532

N'nin 9 tümleyeni $\Rightarrow$ 96749 + 96749

(taşma /işaret biti) $\rightarrow$ 1 69281

işaret biti '1' olduğundan sonuca '1' eklenir. Bu durumda,

69281

\+ 1

69282

değeri bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- **Örnek :** M = 03250
- N = 72532 ise ‘M-N’ işlemini 9 tümleyenine göre yapalım.
- Çıkarılan sayının 9 tümleyeni alınıp, toplama işlemi yapılırsa;

03250

- N sayısının 9 tümleyeni $\Rightarrow$ 27467 + 27467
- (taşma yok) $\longrightarrow$ 0 30717
- İşaret biti değeri ‘0’ olduğundan, sonucun 9 tümleyenini alıp, önüne (-) işareti koymamız gerekir. Sonuç ;

$(-69282)_{10}$

- olarak bulunur

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- **Örnek :** M=1010100 ve N=1000100 olduğuna göre 'M-N' işlemini (r-1) tümleyenine göre yapalım.
- N'nin 1 tümleyeni $\Rightarrow$ 0111011 olduğundan;
- 1010100
- + 0111011
- taşma var ⟶ 1 0001111
- sayısı elde edilir. Sonuca '1' eklenmesi gerekir.

  0001111

  \+ 1

  00010000
- Bu durumda sonuç; $(10000)_2$ olarak bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- R-1 TÜMLEYEN ARİTMETİĞİ İLE ÇIKARMA

- **Örnek :** M = 1000100,
- N = 1010100 ise M-N işlemini 1 tümleyenine göre yapalım.
- 1000100
- N'nin 1 tümleyeni$\Rightarrow$ + 0101011
- işaret biti = 0 $\longrightarrow$ 0 1101111
- Bu durumda sonuç (-) dir ve cevap; $(-0010000)_2$ olarak bulunur.
- **Örnek :** $(15)_{10}$ - $(20)_{10}$ = ? işlemini 1 tümleyenine göre yapalım.
- Sayılar ikili sisteme dönüştürülür ve çıkarılan sayının '1' tümleyeni alınırsa ;

(15)= 01111 $\Rightarrow$ 01111

(20) = 10100 $\Rightarrow$ + 01011

0 11010

- sayısı elde edilir. Bulunan sayının 1 tümleyeninin alınması ile sonuç; $(-\ 00101)_2$

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYI SİSTEMİNDE ÇARPMA

- İkili sayı sisteminde çarpma işleminde onluk sistemde kullanılan işlem sırası takip edilir ve ‘0’ ve ‘1’ değerlerinin çarpılması söz konusu olduğundan aşağıdaki kurallar geçerlidir.
- 0 x 0 = 0 ,   0 x 1 = 0 ,   1 x 0 = 0 ,   1 x 1 = 1.
- **Örnek :** $(1011)_2 * (101)_2$ ve $(10111)_2 * (110)_2$ işlemlerini yapalım.
-

1011	10111
x 101	x 110
1011	00000
0000	10111
+ 1011	+ 10111
110111	10001010

Sayı Sistemleri- İkili Sayı Sisteminde Bölme

- İkili sayılarda bölme işlemi, onluk sayı sisteminde olduğu gibi bölünenden bölenin çıkarılması işlemine sonuç sıfır kalıncaya kadar devam edilmesiyle gerçekleştirilir.
- **Örnek :** $(10110)_2 \div (100)_2$ =? işlemini yapalım.
- 10110 / 100
- \- 100 101,1
- 00110
- \- 100
- 0100
- \- 100
- 000
- Sonuç = $(101.1)_2$ bulunur.

SAYI SİSTEMLERİ- İKİLİ SAYI SİSTEMİNDE BÖLME

- **Örnek :** (1111101) ÷ (101) =? işleminin sonucunu bulalım.
- 1111101/ 101
- \- 101 11001
- 0101
- \- 101
- 0000101
- \- 101
- 000
- Sonuç = $(11001)_2$ olarak bulunur.