



DERS NOTLARI

Yard. Doç. Dr. Namık AKÇAY
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

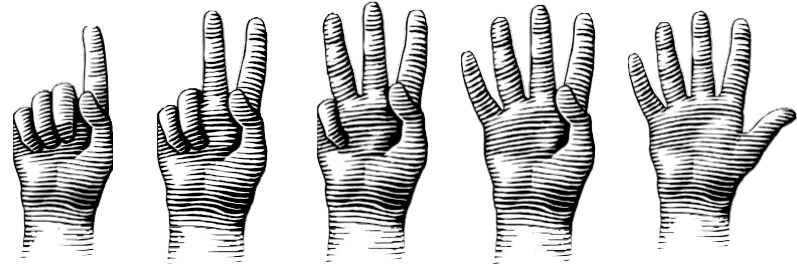
DERS-2 → 22.02.2016

Sayı Sistemleri

Binary Numbers – The Computer Number System

İkili sayı Sistemi– Bilgisayar Sayı Sistemi

- Sayı sistemleri nesnelere saymak için kullanılır. Günlük yaşamda 10’lu sistemi kullanıyoruz.
- Sayı, hangi tabandaysa alt indis olarak yazılır, “10” tabanında buna gerek yoktur.
- Her kolon “10⁰” ‘dan başlayarak 10’un kuvvetlerini gösterir.



İnsanlar neden 10’lu sistemi kullanır?

Çünkü, 10 parmağımız var!

1	3	5	7	8	9	6
10 ⁶	10 ⁵	10 ⁴	10 ³	10 ²	10 ¹	10 ⁰

– Örnek: →

1,357,896 = 1 x bir milyon + 3 x yüzbin + 5 x on bin + 7 x bin + 8 x yüz + 9 x on + 6 x bir

Sayı Sistemleri

Sayı Sistemi– Gösterim

ROMA Rakamları

- 1996 = **MCMXCVI**
2000 = **MM**
- (M = 1000, C = 100, X = 10, V = 5, I = 1)

VII = 7 (5+1+1), ama XC = 90 (100 – 10),
Ve (Daha kötüsü!)
XLVII = 47 (50 – 10+5+1+1).

- X • C = M, L/V=X Karışık!

10'LU SİSTEM DAHA İYİ

10'LU SİSTEMDE GÖSTERİM:

$$1996_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

$$2000 = 2 \times 10^3$$



M?

L?

X?

I?

V?

Sayı Sistemleri

Bilgisayar Sayı Sistemi

- Bütün Bilgisayarlar ikilik sayı sistemini kullanır:
 - İkili sayı sistemi: Taban = 2.
İki rakamdan oluşur: 0 ve 1.
 - Tek rakama **Binary digIT**, kısaca **bit** denir.
- Bilgisayarlar, işlemleri ikili sayı grupları halinde yaparlar. Bu gruplara kelime (word) denir.
- Günümüzde çoğu bilgisayar 32-, 64-ya da 128-bit kelimeler kullanır:
 - Word'lerin alt grupları :
8-bit gruba **bytes** denir.



Bilgisayar sayıları 1 ve 0 dır.

Anahtar Kapalı = 1

Anahtar Açık = 0



= 1



= 0

Sayı Sistemleri

Bilgisayar Sayı Sistemi

Önek	Adı	SI Anlamı	İkili sistemdeki anlamı	Farkları
K veya k	kilo	$10^3 = 1000^1$	$2^{10} = 1024^1$	2.40%
M	mega	$10^6 = 1000^2$	$2^{20} = 1024^2$	4.86%
G	giga	$10^9 = 1000^3$	$2^{30} = 1024^3$	7.37%
T	tera	$10^{12} = 1000^4$	$2^{40} = 1024^4$	9.95%
P	peta	$10^{15} = 1000^5$	$2^{50} = 1024^5$	12.59%
E	exa	$10^{18} = 1000^6$	$2^{60} = 1024^6$	15.29%

1998'de IEC daha sonraları ise IEEE yeni standart yayınladı. binary prefix:

Önek	Adı			
Kibi	ikilik kilo	1 kibibayt (KiB)	2^{10} bayt	1024 B
Mebi	ikilik mega	1 Mebibayt (MiB)	2^{20} bayt	1024 KiB
Gibi	ikilik giga	1 Gibibayt (GiB)	2^{30} bayt	1024 MiB
Tebi	ikilik tera	1 Tebibayt (TiB)	2^{40} bayt	1024 GiB
Pebi	ikilik peta	1 Pebibayt (PiB)	2^{50} bayt	1024 TiB
Exbi	ikilik exa	1 Exbibayt (EiB)	2^{60} bayt	1024 PiB

Sayı Sistemleri

İkili Sistemde Gösterim

- 32-bit ikili sayılar: **1101 0010 0101 0011 0101 1111 0001 1001**
- 10'lu sistemde gösterim:
 - $1996_{10} = 1 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 6 \times 10^0$
 - $2002 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 2 \times 10^0$
- İkili sisteme çevirme $255_{10} = 1111111_2$:
$$255_{10} = 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$= 2^8 - 1.$$
- 10'lu sistem sağdan sola doğru 10^0 dan başlayarak 10'un kuvvetleri şeklinde,
- İkili sistemde sağdan sola doğru, 2^0 dan başlayarak 2'nin kuvvetleri şeklinde artar.

Sayı Sistemleri

İkili Sistemde Gösterim

- 10'lu sistemde, 0 dan farklı her sayı, bulunduğu sıradaki 10'un kuvvetiyle çarpılır.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 10^{-1} & & & \\
 & & 10^0 & & 10^{-2} & & \\
 & 10^1 & & & & & 10^{-3} \\
 10^2 & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbf{975.268}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & 10^{-4} & \\
 & & & 10^1 & & & & 10^{-3} \\
 & & 10^2 & & 10^0 & & 10^{-2} & \\
 & 10^3 & & & & & 10^{-1} & \\
 10^4 & & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbf{47215.8639}
 \end{array}$$

- 2'li sistemde (10'lu sisteme benzer şekilde) bulunduğu sıradaki 2'nin kuvvetiyle çarpılır.

$$\begin{array}{cccc}
 & & & 2^{-1} \\
 & & 2^0 & \\
 & 2^1 & & \\
 2^2 & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbf{111.1}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 2^{-1} \\
 & & & 2^0 & & & 2^{-2} \\
 & & 2^1 & & 2^{-1} & & 2^{-3} \\
 2^2 & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbf{101.011}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 2^{-4} \\
 & & & & & & 2^1 & \\
 & & & 2^2 & & & 2^0 & 2^{-3} \\
 & & 2^3 & & & & 2^{-1} & 2^{-2} \\
 2^4 & & & & & & & \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \mathbf{11101.1011}
 \end{array}$$

Sayı Sistemleri

İkili Sistem Örnekler

- $11 = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = 3_{10}$
- $101 = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 4 + 1 = 5_{10}$
- $1001 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^0 = 8 + 1 = 9_{10}$
- $1100 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 = 8 + 4 = 12_{10}$.
- $11101 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 = 16 + 8 + 4 + 1 = 29_{10}$.
- $0.1 = 1 \times 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5_{10}$
- $0.111 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} = 0.5 + 0.25 + 0.125 = 0.875_{10}$
- $0.10001 = 1 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-5} = 0.5 + 0.03125 = 0.53125_{10}$
- $1101.01 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-2} = 8 + 4 + 1 + 0.25 = 13.25_{10}$
- $11.001 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0 + 1 \times 2^{-3} = 2 + 1 + 0.125 = 3.125_{10}$
- $10.0011 = 1 \times 2^1 + 1 \times 2^{-3} + 1 \times 2^{-4} = 2 + 0.125 + 0.0625 = 2.1875_{10}$

Sayı Sistemleri

8'li (Octal) ve 16'lı (Hexadecimal) Sayı Sistemleri

İkili sayı sistemindeki sayıların daha kolay gösterilmesini sağlayan sayı sistemlerinden birisi, sekizli (octal) sayı sistemidir.

Sekizli sayı sisteminde taban '8' ve kullanılan sayılar; 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7'dir.

İkili sayı sisteminin daha kolay gösterilmesini sağlayan ve günümüz bilgisayarlarında yaygın olarak kullanılan sayı sistemi onaltılık (hexadecimal) sayı sistemidir. Onaltılı sayı sisteminde 0 ile 9 arasındaki rakamlar ile A, B, C, D, E, F harfleri kullanılır.

$0_{16} = 0_{10} = 0000_2$	$4_{16} = 4_{10} = 0100_2$	$8_{16} = 8_{10} = 1000_2$	$C_{16} = 12_{10} = 1100_2$
$1_{16} = 1_{10} = 0001_2$	$5_{16} = 5_{10} = 0101_2$	$9_{16} = 9_{10} = 1001_2$	$D_{16} = 13_{10} = 1101_2$
$2_{16} = 2_{10} = 0010_2$	$6_{16} = 6_{10} = 0110_2$	$A_{16} = 10_{10} = 1010_2$	$E_{16} = 14_{10} = 1110_2$
$3_{16} = 3_{10} = 0011_2$	$7_{16} = 7_{10} = 0111_2$	$B_{16} = 11_{10} = 1011_2$	$F_{16} = 15_{10} = 1111_2$

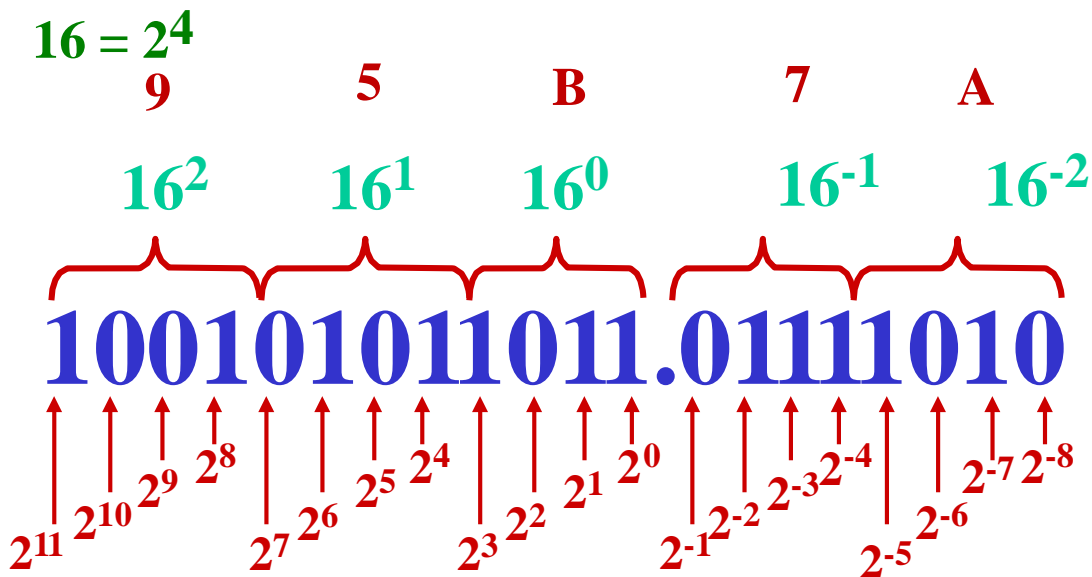
Sayı Sistemleri

8'li (Octal) ve 16'lı (Hexadecimal) Sayı Sistemleri

Onlu	İkili	Sekizli	Onaltılı
0	00000	0	0
1	00001	1	1
2	00010	2	2
3	00011	3	3
4	00100	4	4
5	00101	5	5
6	00110	6	6
7	00111	7	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

Sayı Sistemleri

2'li - 16'lı Dönüşümü



$$(7DF)_{16} = (?)_{10}$$

$$(7DF)_{16} = (2015)_{10}$$

$$7DE = (7 * 16^2) + (13 * 16^1) + (14 * 16^0)$$

$$7DE = (7 * 256) + (13 * 16) + (14 * 1)$$

$$7DE = 1792 + 208 + 14 \quad 7DE = 2014$$

Onlu	İkili	Sekizli	Onaltılı
0	00000	0	0
1	00001	1	1
2	00010	2	2
3	00011	3	3
4	00100	4	4
5	00101	5	5
6	00110	6	6
7	00111	7	7
8	01000	8	8
9	01001	9	9
10	01010	10	A
11	01011	11	B
12	01100	12	C
13	01101	13	D
14	01110	14	E
15	01111	15	F
16	10000	16	10
17	10001	17	11
18	10010	18	12
19	10011	19	13
20	10100	20	14

0x95B.7A*

*Note: Sayıdan önce "0x" varsa "hexadecimal" olduğunu saydır.

Sayı Sistemleri

2'li - 16'lı Dönüşümü

$(01111000101001011010111110111110)_2$

4-bitlik gruplara ayırılır

0111 1000 1010 0101 1010 1111 1011 1110

$$0111_2 = 7_{16}, \quad 1000_2 = 8_{16}$$

$$1010_2 = A_{16}, \quad 0101_2 = 5_{16}$$

$$1010_2 = A_{16}, \quad 1111_2 = F_{16}$$

$$1011_2 = B_{16}, \quad 1110_2 = E_{16}$$

$01111000101001011010111110111110 = 0x78A5AFBE$
 $(01111000101001011010111110111110)_2 = (78A5AFBE)_{16}$

Onlu	İkili	Sekizli	Onaltılı
0	00000	0	0
1	00001	1	1
2	00010	2	2
3	00011	3	3
4	00100	4	4
5	00101	5	5
6	00110	6	6
7	00111	7	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

Sayı Sistemleri

2'li - 16'lı Dönüşümü

$(1001011100.11110011)_2$

4-bitlik gruplara ayrılır

10 0101 1100 . 1111 0011

(00)10 0101 1100 . 1111 0011

2 5 C . F 3 = 0x 25C.F3

Onlu	İkili	Sekizli	Onaltılı
0	00000	0	0
1	00001	1	1
2	00010	2	2
3	00011	3	3
4	00100	4	4
5	00101	5	5
6	00110	6	6
7	00111	7	7
8	01000	10	8
9	01001	11	9
10	01010	12	A
11	01011	13	B
12	01100	14	C
13	01101	15	D
14	01110	16	E
15	01111	17	F
16	10000	20	10
17	10001	21	11
18	10010	22	12
19	10011	23	13
20	10100	24	14

Sayı Sistemleri

16'lı - 2'li Dönüşümü

$$0x 2375 = (00)10 0011 0111 0101 = 10001101110101.$$

$$0x CD.89 = 1100 1101.1000 1001 = 11001101.10001001.$$

$$0x 37AC.6 = (00)11 0111 1010 1100.011(0) = 11011110101100.011.$$

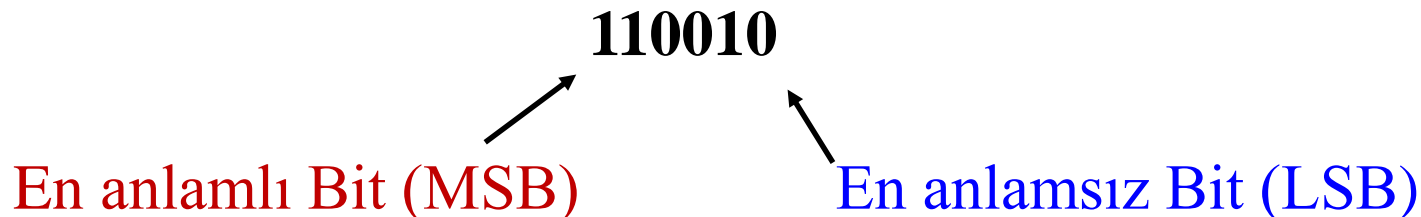
$$0x 3.DCAB = (00)11.1101 1100 1010 1011 = 11.1101110010101011.$$

İkili	Onaltılı
00000	0
00001	1
00010	2
00011	3
00100	4
00101	5
00110	6
00111	7
01000	8
01001	9
01010	A
01011	B
01100	C
01101	D
01110	E
01111	F
10000	10
10001	11
10010	12
10011	13
10100	14

Sayı Sistemleri

İkili (Binary-Dual) Sayı Sistemi

- ‘0’ ve ‘1’ rakamları ile temsil edilen, taban değeri ‘2’ olan ve iki olasılıklı durumları ifade etmek amacıyla kullanılan sayı sistemi ‘**İkili**’ veya ‘**Binary**’ sayı sistemi olarak adlandırılır.
- İkili sayı sisteminde her bir basamak ‘**BIT**’ olarak (**Binary DigiT**) adlandırılır.
- En sağdaki basamağa en Düşük Anlamlı Bit - DAB (Least Significant Bit-**LSB**),
- En soldaki basamağa en Yüksek Anlamlı Bit-YAB (Most Significant Bit-**MSB**) denir.



Sayı Sistemleri

10'luk- İkili Dönüşümü

İki yöntem kullanılabilir:

1. İkili sayının basamak değerlerinin toplamı onluk sayıyı verecek şekilde düzenlemeye gidilir. Özellikle küçük sayıları için pratik bir yöntemdir.

Örneğin onluk sistemdeki bir sayı ikilik sistemde **7 bit** ile ifade edilebiliyorsa, bu ikili sayının basamak değerleri

(**64** **32** **16** **8** **4** **2** **1**) dir.

Onluk sistemdeki **98** sayısının ikilik sistemdeki karşılığı **64**, **32** ve **2** sayılarının toplamıyla pratik bir şekilde bulunabilir. O halde bu basamak değerlerine karşılık gelen bitler 1 alınarak $(1100010)_2$ sayısı elde edilir.

64 **32** **16** **8** **4** **2** **1**

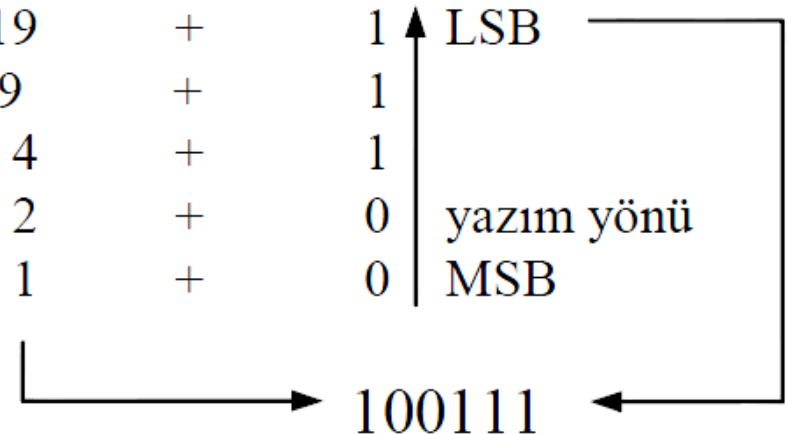
$$98 = 64 + 32 + 2 = (1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0)_2$$

Sayı Sistemleri

10'luk- İkili Dönüşümü

İkinci yöntem: $(39)_{10}$ sayısının ikili sayı sistemine çevirelim.

<u>Bölünen</u>	<u>Bölüm</u>	<u>Kalan</u>	
39/2	19	+	1
19/2	9	+	1
9/2	4	+	1
4/2	2	+	0
2/2	1	+	0



$(39)_{10} = (100111)_2$

MSB: En büyük değerlikli sayı.
(Most Significant Bit)

LSB: En küçük değerlikli sayı.
(Least Significant Bit)

Onluk sistemde verilen sayıyı sürekli 2'ye bölerek, bölme işlemi sonucunda oluşan kalan kısımlarından ikili sayıyı oluşturmaktır. İlk bölme işlemi sonucunda kalan LSB'yi, son bölme işleminden sonra oluşan kalan ise MSB'yi oluşturur

Sayı Sistemleri

10'luk- İkili Dönüşümü-Ondalıklı Sayılar

**Ondalıklı sayıların ikilik sisteme dönüştürülmesi:
iki yöntem kullanılabilir:**

1. İkili sayıların kesirli kısımlarının basamak değerlerinin toplamı onluk sistemdeki kesirli sayıyı verecek şekilde düzenlemeye gidilir.

İkilik sistemde kesirli sayıların basamak ağırlıkları 0.5, 0.25, 0.125, 0.0625 şeklinde gider.

Örneğin 0.625 sayısı (0.5 + 0.125) şeklinde ifade edilebileceğinden, bu sayının ikilik sistemdeki karşılığı, 2^{-1} ve 2^{-3} ağırlıklarına sahip bitlerin 1 yapılması suretiyle elde edilir.

$$0.625_{10} = (0.101)_2$$

Sayı Sistemleri

10'luk- İkili Dönüşümü-Ondalıklı Sayılar

Ondalıklı sayıların ikilik sisteme dönüştürülmesi:

2. Tekrarlı çarpma yöntemidir: Onluk sistemdeki kesirli kısım sürekli 2 ile çarpılır ve çarpım işleminin sonucunda oluşan tamsayı kısımlarından (1 veya 0'dır) ikili sayı elde edilir. Bu çarpma işlemine kesirli kısım sıfır oluncaya kadar devam edilir.

$$\left. \begin{array}{l} (0.625) \\ 0.625 \times 2 = 1.25 \text{ (MSB)} \\ 0.25 \times 2 = 0.50 \\ 0.5 \times 2 = 1.00 \text{ (LSB)} \end{array} \right\} (0.625)_{10} = (0.101)_2$$

Sayı Sistemleri

10'luk- İkili Dönüşümü

- 36.125

36/2=18, 0 Kalan; 18/2=9, 0 Kalan; 9/2=4, 1 Kalan; 4/2=2, 0 Kalan;
2/2=1, 0 Kalan, 1/2=0, 1 Bölüm.

$$.125 \times 2 = 0.25; .25 \times 2 = 0.5; .5 \times 2 = 1.0$$
$$36.125_{10} = 100100.001_2.$$

Okuma Yönü ← Tam sayı
Okuma Yönü → küsürlü

- 19.375: 19/2=9, 1 Kalan; 9/2=4, 1 Kalan; 4/2=2, 0 Kalan; 2/2=1, 0 Kalan;
1/2=0, 1 Kalan.

$$.375 \times 2 = 0.75; .75 \times 2 = 1.5; .5 \times 2 = 1.0.$$

$$19.375_{10} = 10011.011_2.$$

- 7.33: 7/2=3, 1 Kalan; 3/2=1, 1 Kalan; 1/2=0, 1 Kalan
.33x2=0.66; .66x2=1.32; .32x2=0.64; .64x2=1.28 (Virgülden sonra 0 değil!)

$$7.33_{10} \approx 111.0101_2$$

YAKLAŞIK

Sayı Sistemleri

2'li- Sistemde Toplama

İkili sayıların toplama işleminde 4 temel kural vardır;

$$0 + 0 = 0$$

$$0 + 1 = 1$$

$$1 + 0 = 1$$

$$1 + 1 = \mathbf{10} \text{ (elde biti oluşur)}$$

İki sayıyı toplarken elde biti 1 ise 4 farklı durum oluşur;

elde toplam

 ↙ ↘

$$1 + 0 + 0 = 01$$
$$1 + 0 + 1 = 10$$
$$1 + 1 + 0 = 10$$
$$1 + 1 + 1 = 11$$

$$\begin{array}{r} 101_2 \\ + 001_2 \\ \hline 110_2 \end{array}$$

Sayı Sistemleri

2'li- Sistemde Çıkarma-Çarpma

İki sistemde çıkarma:

İkili sayıların çıkarma işleminde yine 4 temel kural vardır;
 $0 - 0 = 0$, $1 - 0 = 1$, $1 - 1 = 0$ ve $10 - 1 = 1$ (borç biti sayesinde olur)

$$\begin{array}{r} 110 \\ - 001 \\ \hline 101 \end{array}$$

İkili sistemde çarpma:

İkili sayıların çarpma işleminde yine 4 temel kural vardır;

$0 \times 0 = 0$, $0 \times 1 = 0$, $1 \times 0 = 0$ ve $1 \times 1 = 1$

Onluk sistemdeki çarpma işlemi gibidir: kısmi çarpımların oluşturulması ve arda arda gelen kısmi çarpımların bir sola kaydırılıp toplanması esasına dayanır.

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 11 \\ \hline 10 \\ +10 \\ \hline 110 \end{array}$$

} Ara çarpımlar